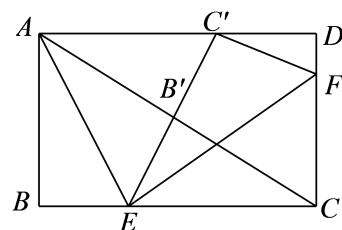


第2讲 四边形中的折叠问题（练习）

一、矩形的翻折

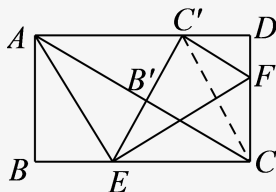
1. 如图所示，在矩形 $ABCD$ 中，点 E ， F 分别在 BC ， CD 上，将 $\triangle ABE$ 沿 AE 折叠，使点 B 落在 AC 上的点 B' 处，又将 $\triangle CEF$ 沿 EF 折叠，使点 C 落在直线 EB' 与 AD 的交点 C' 处，则 $BC:AC$ 的值为 _____ .



【答案】 $\frac{\sqrt{3}}{2}$

【解析】 连接 CC' .

$\because \triangle CEF$ 沿 EF 折叠，
点 C 落在 AD 上的 C'
处，



$\therefore \triangle ECF \cong \triangle EC'F$,

$\therefore EC = EC'$,

$\therefore \angle ECC' = \angle EC'C$.

$\because$ 四边形 $ABCD$ 为矩形，

$\therefore AD \parallel BC$, $\angle B = \angle D = 90^\circ$, $AB = AB'$,

$\therefore \angle DC'C = \angle ECC'$,

$\therefore \angle DC'C = \angle EC'C$.

$\because \triangle ABE$ 沿 AE 折叠，使点 B 落在 AC 上的 B' 处，

$\therefore \triangle ABE \cong \triangle AB'E$,

$\therefore \angle AB'E = \angle B = 90^\circ$, $AB = AB'$,

$\therefore \angle C'B'C = \angle AB'E = 90^\circ$.

$\because \angle D = 90^\circ$,

$\therefore \angle C'B'C = \angle D$.

在 $\triangle CC'B$ 和 $\triangle CC'D$ 中，

$$\begin{cases} \angle CC'B' = \angle DC'C \\ \angle C'B'C = \angle D \\ CC' = CC' \end{cases},$$

$\therefore \triangle CC'B' \cong \triangle CC'D$ (AAS),

$\therefore CB' = CD$.

$\therefore AB = CD$,

$\therefore CB' = AB$,

$\therefore AC = AB' + CB' = 2AB$.

$\therefore$ 在 $\text{Rt}\triangle ACB$ 中, $\angle B = 90^\circ$,

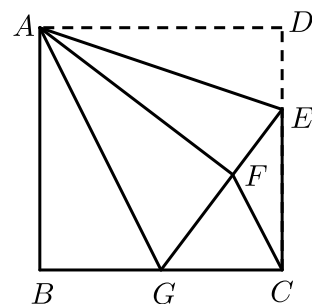
$\therefore AB^2 + BC^2 = AC^2$,

$\therefore BC = \sqrt{AC^2 - AB^2} = \sqrt{(2AB)^2 - AB^2} = \sqrt{3}AB$,

$\therefore \frac{BC}{AC} = \frac{\sqrt{3}AB}{2AB} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

【标注】【知识点】其它翻折问题

2. 如图, 正方形 $ABCD$ 中, $AB = 6$, 点 E 在边 CD 上, 且 $CD = 3DE$ 将 $\triangle ADE$ 沿 AE 对折至 $\triangle AFE$, 延长 EF 交边 BC 于点 G , 连接 AG 、 CF 下列结论: ① $\triangle ABG \cong \triangle AFG$; ② $BG = GC$; ③ $AG \parallel CF$; ④ 图中与 $\angle AGB$ 相等的角有 4 个 ⑤ $S_{\triangle FGC} = 3$. 其中正确的结论有 ().



A. 2个

B. 3个

C. 4个

D. 5个

【答案】 C

【解析】 $\because CD = 3DE$, $CD = AB = 6$,

$\therefore CE = 4$, $DE = 2$,

$\because \triangle ADE$ 沿 AE 对折至 $\triangle AFE$,

$\therefore AD = AF = 6$, $DE = EF = 2$,

在 $\text{Rt}\triangle ABG$ 和 $\text{Rt}\triangle AFG$ 中,

$$\begin{cases} AG = AG \\ AB = AF \end{cases}$$

$\therefore \text{Rt}\triangle ABG \cong \triangle AFG$ (HL), 故①正确,

由①知 $BG = GF$, 设 $BG = GF = x$,

则 $CG = 6 - x$,

Rt $\triangle CEG$ 中: $CG^2 + CE^2 = EG^2$,

即 $(6 - x)^2 + 4^2 = (x + 2)^2$,

解得: $x = 3$,

故 $BG = GC = 3$, ②正确,

$\therefore \angle AGB = \angle AGF$, $\angle GFC = \angle GCF$,

$\angle AGB + \angle AGF = \angle GFC + \angle GCF$,

$\therefore \angle AGF = \angle CFG$,

$\therefore AG \parallel CF$, ③正确,

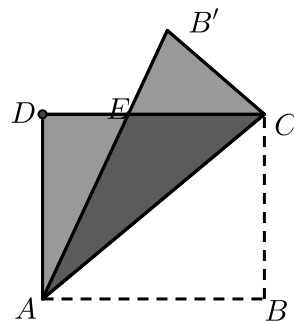
$\angle AGB = \angle AGF = \angle GFC = \angle DAG$, 故④正确,

$S_{\triangle FGC} = \frac{3}{2+3} S_{\triangle CEG} = \frac{3}{5} \times 6 = 3.6$, 故⑤错.

故选C.

【标注】【知识点】翻折问题与勾股定理

3. 如图, 把一张长方形纸片 $ABCD$, 沿对角线 AC 折叠, 点 B 的对应点为 B' , AB' 与 DC 相交于点 E , 则下列结论中不一定正确的是.



- A. $\angle ECA = \angle EAC$ B. $ED = EB'$ C. $AE = EC$ D. $\angle B'CE = \angle ECA$

【答案】 D

【解析】 有折叠可知:

$\angle BAC = \angle EAC$, $AB' = AB$,

在长方形 $ABCD$ 中, $AB \parallel CD$, $AB = CD$,

$\therefore \angle ECA = \angle BAC$,

$\therefore \angle ECA = \angle EAC$, 故A正确,

$\therefore AE = EC$, 故B正确,

$\therefore AB' - AE = CD - EC$, 即 $ED = EB'$,

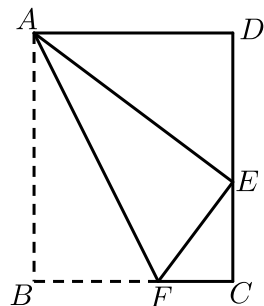
故C正确，

对于D， $\angle B'CE$ 不一定小于 $\angle ECA$ ，

故答未选D．

【标注】【知识点】其它翻折问题

4. 如图，四边形 $ABCD$ 为平行四边形纸片．把纸片 $ABCD$ 折叠，使点 B 恰好落在 CD 边上，折痕为 AF ，且 $AB = 10\text{cm}$ ， $AD = 8\text{cm}$ ， $DE = 6\text{cm}$ ．



- (1) 求证：四边形 $ABCD$ 是矩形．
(2) 求 BF 的长．

【答案】(1) 证明见解析．

(2) 5cm ．

【解析】(1) $\because$ 把纸片 $ABCD$ 折叠，使点 B 恰好落在 CD 边上，

$$\therefore AE = AB = 10, AE^2 = 10^2 = 100,$$

$$\text{又} \because AD^2 + DE^2 = 8^2 + 6^2 = 100,$$

$$\therefore AD^2 + DE^2 = AE^2,$$

$\therefore \triangle ADE$ 是直角三角形，且 $\angle D = 90^\circ$ ，

又 $\because$ 四边形 $ABCD$ 为平行四边形，

$\therefore$ 平行四边形 $ABCD$ 是矩形（有一个角是直角的平行四边形是矩形）．

(2) 设 $BF = x$ ，则 $EF = BF = x$ ，

$$EC = CD - DE = 10 - 6 = 4\text{cm},$$

$$FC = BC - BF = 8 - x,$$

$$\text{在Rt}\triangle EFC\text{中}, EC^2 + FC^2 = EF^2,$$

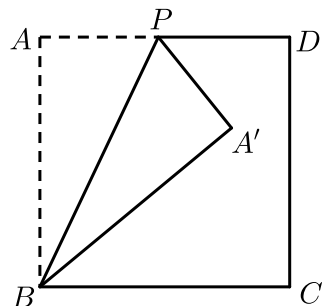
$$\text{即} 4^2 + (8 - x)^2 = x^2,$$

$$\text{解得} x = 5,$$

故 $BF = 5\text{cm}$ ．

【标注】【知识点】翻折问题与勾股定理

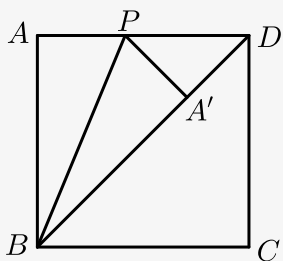
5. 如图，边长为1的正方形 $ABCD$ ，点 P 为边 AD 上一动点（不与点 A 重合）. 连接 BP ，将 $\triangle ABP$ 沿直线 BP 折叠，点 A 落在点 A' 处，如果点 A' 恰好落在正方形 $ABCD$ 的对角线上，则 AP 的长为 _____ .



【答案】 $\sqrt{2}-1$ 或 1

【解析】①若 A' 在对角线 BD 上时，

此时 B, A', D 三点共线（如下图），



此时 $\angle A = \angle PA'B = 90^\circ$ ， $\angle BDP = 45^\circ$ ，

$\therefore \angle DPA' = 45^\circ$ ，

$\therefore A'D = A'P = AP$ ，

又 $\because A'D = BD - A'B$ ，

由勾股定理可得： $BD = \sqrt{2}$ ，

$\because$ 折叠，

$\therefore AB = A'B = 1$ ，

$\therefore AP = A'D = \sqrt{2} - 1$.

②若 A' 在对角线 AC 上时，

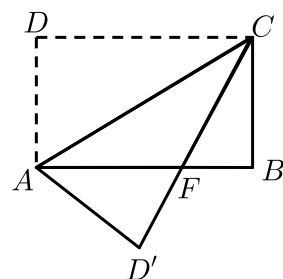
此时 A, A', C 三点共线，

且 P 点与 D 重合， A' 与 C 重合，

此时 $AP = AD = 1$.

【标注】【知识点】翻折问题与勾股定理

6. 如图，在矩形 $ABCD$ 中， $AB = 8$ ， $BC = 4$ ，将矩形沿 AC 折叠，点 D 落在 D' 处，则重叠部分 $\triangle AFC$ 的面积是（ ）。



- A. 10 B. 12 C. 16 D. 20

【答案】 A

【解析】 由折叠知 $\angle DCA = \angle ACD'$ ，

$$\because AB \parallel CD,$$

$$\therefore \angle DCA = \angle CAB,$$

$$\therefore \angle CAB = \angle ACD',$$

$$\therefore AF = CF$$

$$\text{又} \because AB = 8, BC = 4,$$

$$\therefore BF = AB - AF = 8 - AF,$$

$$\therefore \text{在Rt}\triangle BCF\text{中},$$

$$\therefore CF^2 = BF^2 + BC^2,$$

$$AF^2 = (8 - AF)^2 + 16$$

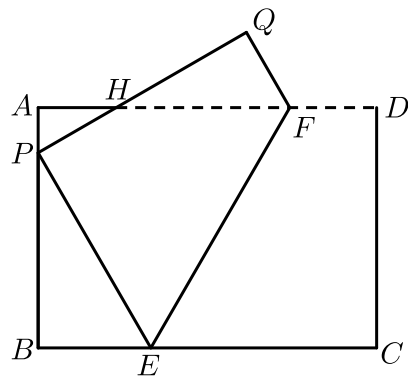
$$\therefore AF = 5,$$

$$\therefore S_{\triangle ACF} = \frac{1}{2} \cdot AF \cdot BC = \frac{1}{2} \times 5 \times 4 = 10.$$

故选A.

【标注】【知识点】翻折问题与勾股定理

7. 在矩形纸片 $ABCD$ 中， $AB = 3\sqrt{3}$ ， $BC = 6$ ，沿 EF 折叠后，点 C 落在 AB 边上的点 P 处，点 D 落在点 Q 处， AD 与 PQ 相交于点 H ， $\angle BPE = 30^\circ$ 。



- (1) 求 BE , QF 的长 .
- (2) 求四边形 $PEFH$ 的面积 .

【答案】 (1) $BE = 2$, $QF = 1$.

(2) $7\sqrt{3}$.

【解析】 (1) 设 $BE = x$, 则 $EC = 6 - x$,

$$\because \angle BPE = 30^\circ , \angle B = 90^\circ ,$$

$$\therefore BE = \frac{1}{2} PE ,$$

由折叠知 $PE = EC$,

$$\therefore x = \frac{1}{2} (6 - x) ,$$

$$\therefore x = 2 ,$$

$$\therefore PE = 4 = EC ,$$

$$\therefore PB = \sqrt{4^2 - 2^2} = 2\sqrt{3} ,$$

$$\therefore AP = \sqrt{3} ,$$

$$\because \angle QPE = \angle C = 90^\circ ,$$

$$\therefore \angle APH = 180^\circ - 30^\circ - 90^\circ = 60^\circ ,$$

$$\because \angle A = 90^\circ ,$$

$$\therefore \angle AHP = 30^\circ ,$$

$$\therefore PH = 2AP = 2\sqrt{3} ,$$

$$\because PQ = DC = 3\sqrt{3} ,$$

$$\therefore HQ = \sqrt{3} ,$$

$$\because \angle Q = \angle D = 90^\circ , \angle QHF = \angle AHP = 30^\circ ,$$

$$\therefore QF = \frac{1}{2} HF ,$$

$$\text{又 } QF^2 + HQ^2 = FH^2 ,$$

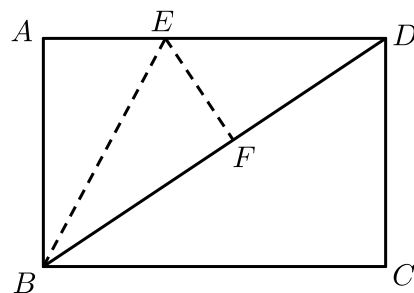
$$\therefore QF = 1 .$$

$$(2) S_{\text{四边形} PEFH} = S_{\text{四边形} PEFQ} - S_{\triangle HFQ}$$

$$\begin{aligned}
&= S_{\text{四边形}CEFD} - S_{\triangle HFQ} \\
&= \frac{1}{2} \times (1+4) \times 3\sqrt{3} - \frac{1}{2} \times 1 \times \sqrt{3} \\
&= 7\sqrt{3}.
\end{aligned}$$

【标注】【知识点】翻折问题与勾股定理

8. 如图，在矩形 $ABCD$ 中， $BC = 8$ ， $CD = 6$ ，将 $\triangle ABE$ 沿 BE 折叠，使点 A 恰好落在对角线 BD 上 F 处，则 DE 的长是（ ）。



- A. 3 B. $\frac{24}{5}$ C. 5 D. $\frac{89}{16}$

【答案】C

【解析】 $\because$ 矩形 $ABCD$ ，

$$\therefore \angle BAD = 90^\circ,$$

由折叠可得 $\triangle BFE \cong \triangle BAE$ ，

$$\therefore EF \perp BD, AE = EF, AB = BF,$$

在 $Rt\triangle ABD$ 中， $AB = CD = 6$ ， $BC = AD = 8$ ，

根据勾股定理得： $BD = 10$ ，即 $FD = 10 - 6 = 4$ ，

设 $EF = AE = x$ 则有 $ED = 8 - x$ ，

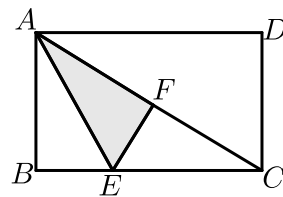
根据勾股定理得： $x^2 + 4^2 = (8 - x)^2$ ，

解得： $x = 3$ ，

则 $DE = 8 - 3 = 5$ ，故选C。

【标注】【知识点】四边形与折叠问题

9. 如图，在矩形纸片 $ABCD$ 中，已知 $AD = 8$ ，折叠纸片，使 AB 边与对角线 AC 重合，点 B 落在点 F 处，折痕为 AE ，且 $EF = 3$ ，则 AB 的长为（ ）。



A. 3

B. 4

C. 5

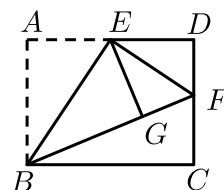
D. 6

【答案】 D

【解析】 由折叠的性质知 $\angle AFE = \angle B = 90^\circ$, $BE = EF = 3$, 则 $\angle EFC = 90^\circ$, $EC = 5$. 在 $\text{Rt}\triangle EFC$ 中, 由勾股定理, 得 $CF = \sqrt{EC^2 - EF^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$, 设 $AB = x$, 则 $AF = x$, $AC = x + 4$, 故在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, 由勾股定理, 得 $AB^2 + BC^2 = AC^2$, 即 $x^2 + 8^2 = (x + 4)^2$, 解得 $x = 6$.
故选 D.

【标注】 【知识点】矩形的性质

10. 如图, 矩形 $ABCD$ 中, E 是 AD 的中点, 将 $\triangle ABE$ 沿直线 BE 折叠后得到 $\triangle GBE$, 延长 BG 交 CD 于点 F , 若 $AB = 6$, $BC = 4\sqrt{6}$, 则 FD 的长为 ().



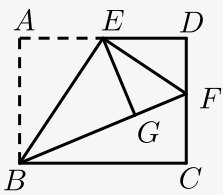
A. 2

B. 4

C. $\sqrt{6}$

D. $2\sqrt{3}$

【答案】 B

【解析】 $\because E$ 是 AD 的中点,
 $\therefore AE = DE$,
 $\because \triangle ABE$ 沿 BE 折叠后得到 $\triangle GBE$,
 $\therefore AE = EG$, $AB = BG$,
 $\therefore ED = EG$,
 $\because$ 在矩形 $ABCD$ 中,

 $\therefore \angle A = \angle D = 90^\circ$,

$$\therefore \angle EGF = 90^\circ ,$$

$\therefore$ 在 $\text{Rt}\triangle EDF$ 和 $\text{Rt}\triangle EGF$ 中 ,

$$\begin{cases} ED = EG \\ EF = EF \end{cases}$$

$\therefore \text{Rt}\triangle EDF \cong \text{Rt}\triangle EGF$ (HL) ,

$$\therefore DF = FG ,$$

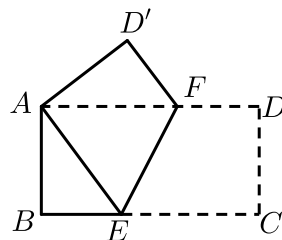
设 $DF = x$, 则 $BF = 6 + x$, $CF = 6 - x$,

$$\text{在 } \text{Rt}\triangle BCF \text{ 中 , } (4\sqrt{6})^2 + (6 - x)^2 = (6 + x)^2 ,$$

解得 $x = 4$.

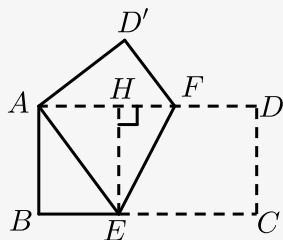
【标注】【知识点】四边形与折叠问题

11. 如图所示 , 在矩形 $ABCD$ 中 , $AB = 8$, $BC = 16$, 将矩形 $ABCD$ 沿 EF 折叠 , 使点 C 与点 A 重合 , 则求折痕 EF 的值 .



【答案】 $EF = 4\sqrt{5}$.

【解析】 设 $BE = x$, 则 $CE = BC - BE = 16 - x$,



$\therefore$ 沿 EF 翻折后点 C 与点 A 重合 ,

$$\therefore AE = CE = 16 - x ,$$

$$\text{在 } \text{Rt}\triangle ABE \text{ 中 , } AB^2 + BE^2 = AE^2 ,$$

$$\text{即 } 8^2 + x^2 = (16 - x)^2 ,$$

$$x = 6 ,$$

$$\therefore AE = 16 - 6 = 10 ,$$

由翻折的性质得 $\angle AEF = \angle CEF$,

$\therefore$ 矩形 $ABCD$ 的对边 $AD \parallel BC$,

$$\therefore \angle AFE = \angle CEF,$$

$$\therefore \angle AEF = \angle AFE,$$

$$\therefore AE = AF = 10,$$

过点E作 $EH \perp AD$ 于H,

则四边形ABEH是矩形,

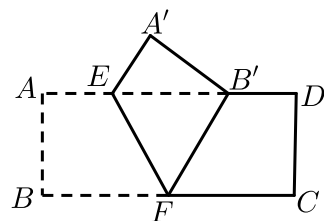
$$\therefore EH = AB = 8, AH = BE = 6,$$

$$\therefore FH = AF - AH = 10 - 6 = 4,$$

$$\text{在Rt}\triangle EFH\text{中}, EF = \sqrt{EH^2 + FH^2} = \sqrt{8^2 + 4^2} = 4\sqrt{5}.$$

【标注】【知识点】翻折问题与勾股定理

12. 如图, 把矩形ABCD沿EF翻折, 点B恰好落在AD边的B'处, 若 $AE = 2$, $DE = 6$, $\angle EFB = 60^\circ$, 则矩形ABCD的面积是().



A. 12

B. 24

C. $12\sqrt{3}$

D. $16\sqrt{3}$

【答案】D

【解析】在矩形ABCD中,

$$\therefore AD \parallel BC,$$

$$\therefore \angle DEF = \angle EFB,$$

$\therefore$ 把矩形ABCD沿EF翻折点B恰好落在AD边的B'处,

$$\therefore \angle DEF = \angle EFB' = 60^\circ, \angle B = \angle A'B'F = 90^\circ, \angle A = \angle A' = 90^\circ, AE = A'E = 2,$$

$$AB = A'B',$$

在 $\triangle EFB'$ 中,

$$\therefore \angle DEF = \angle EFB = \angle EFB' = 60^\circ$$

$\therefore \triangle EFB'$ 是等边三角形,

Rt $\triangle A'EB'$ 中,

$$\therefore \angle A'B'E = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ,$$

$$\therefore B'E = 2A'E, \text{ 而 } A'E = 2,$$

$$\therefore B'E = 4,$$

$$\therefore A'B' = 2\sqrt{3}, \text{ 即 } AB = 2\sqrt{3},$$

$$\therefore AE = 2, DE = 6,$$

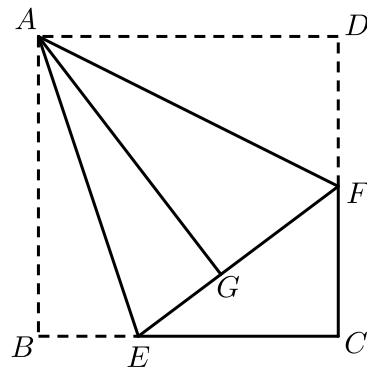
$$\therefore AD = AE + DE = 2 + 6 = 8,$$

$$\therefore \text{矩形 } ABCD \text{ 的面积} = AB \cdot AD = 2\sqrt{3} \times 8 = 16\sqrt{3}.$$

故选：D.

【标注】【知识点】其它翻折问题

13. 如图，正方形纸片 $ABCD$ 的边长为3，点 E 、 F 分别在边 BC 、 CD 上，将 AB 、 AD 分别沿 AE 、 AF 折叠，点 B 、 D 恰好都落在点 G 处，已知 $BE = 1$ ，则 EF 的长为 _____.



【答案】2.5

【解析】 $\because$ 正方形 $ABCD$ 的边长为3，

$$\therefore \angle C = 90^\circ, BC = CD = 3,$$

根据折叠的性质得：

$$EG = BE = 1, GF = DF,$$

$$\text{设 } DF = x,$$

$$\text{则 } EF = EG + GF = 1 + x,$$

$$FC = DC - DF = 3 - x,$$

$$EC = BC - BE = 3 - 1 = 2,$$

$$\text{在 Rt}\triangle EFC \text{ 中, } EF^2 = EC^2 + FC^2,$$

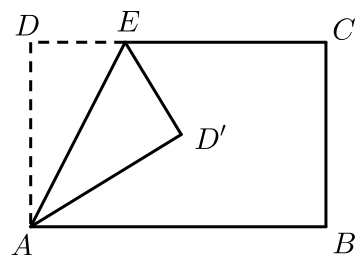
$$\therefore (x + 1)^2 = 2^2 + (3 - x)^2,$$

$$\therefore x = 1.5,$$

$$\therefore EF = 2.5.$$

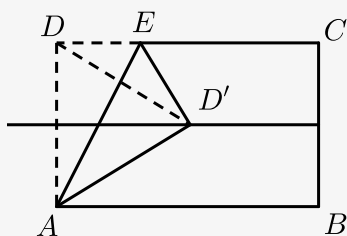
【标注】【知识点】四边形与折叠问题

14. 如图，矩形 $ABCD$ 中， $AD = 5$ ， $AB = 8$ ，点 E 为射线 DC 上一个动点，把 $\triangle ADE$ 沿 AE 折叠，点 D 的对应点为 D' ，当点 D' 刚好落在线段 BC 的垂直平分线上时，求线段 DE 的长。



【答案】 $DE = \frac{5}{3}\sqrt{3}$.

【解析】 如图，连接 $D'D$ ，



$\because$ 点 D' 在 BC 的垂直平分线上，

$\therefore$ 点 D' 在 AD 的垂直平分线上，

$\therefore D'D = AD' = AD$ ；

设 DE 为 x ，易得 $AE = 2x$ ，

由勾股定理得： $(2x)^2 - x^2 = 5^2$ ，

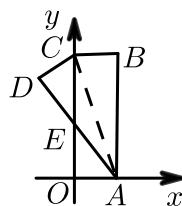
$$\therefore x = \frac{5\sqrt{3}}{3} .$$

$$\therefore DE = \frac{5}{3}\sqrt{3} .$$

【标注】 【知识点】翻折问题与勾股定理

二、平面直角坐标系中的翻折

15. 如图，在直角坐标系中，矩形 $ABCO$ 的边 OA 在 x 轴上，边 OC 在 y 轴上，点 B 的坐标为 $(1,3)$ ，将矩形沿对角线 AC 翻折， B 点落在 D 点的位置，且 AD 交 y 轴于点 E ．那么点 E 的坐标 _____ ．



【答案】 $(0, \frac{4}{3})$

【解析】 由题意知： $\angle BAC = \angle DAC$, $AB \parallel OC$,

$$\therefore \angle ECA = \angle BAC ,$$

$$\therefore \angle ECA = \angle DAC ,$$

$\therefore EA = EC$ (设为 x) . 由题意得：

$$OA = 1 , OC = AB = 3 .$$

$$\text{由勾股定理得： } x^2 = 1^2 + (3 - x)^2 ,$$

$$\text{解得： } x = \frac{5}{3} ,$$

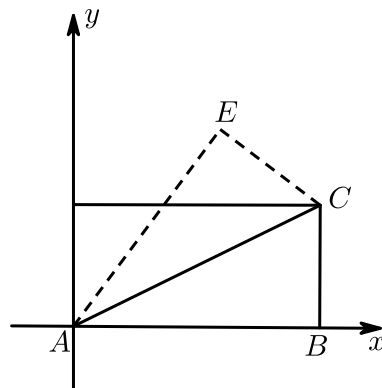
$$\therefore OE = 3 - \frac{5}{3} = \frac{4}{3} ,$$

$$\therefore E \text{ 点的坐标为 } (0, \frac{4}{3}) .$$

$$\text{故答案为： } (0, \frac{4}{3}) .$$

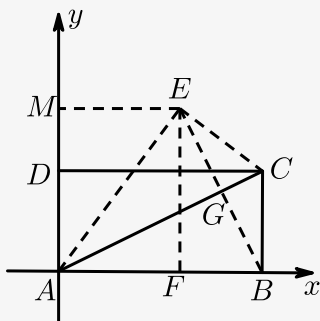
【标注】 【知识点】 翻折问题与勾股定理

16. 如图，在平面直角坐标系中有一矩形 $ABCD$ ，其中 $A(0,0)$ ， $B(8,0)$ ， $C(8,4)$ ．若将 $\triangle ABC$ 沿 AC 所在直线翻折，点 B 落在点 E 处，则 E 点的坐标是 _____ ．



【答案】 $(\frac{24}{5}, \frac{32}{5})$

【解析】 过 E 作 $EM \perp y$ 轴于点 M ，过 E 作 $EF \perp AB$ 于 F ，连接 EB 交 AC 于点 G ，如下图．

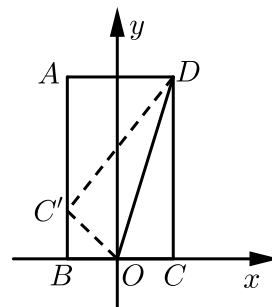


由对称性可知， $AE = AB$ ， $EG = GB$ ，

$$\begin{aligned}
& \text{由题意可知 } EM = AF, \\
& \therefore AE = AB, \\
& \therefore \triangle AEB \text{ 是等腰三角形, } EG = GB, \\
& \therefore AG \perp EB, \\
& \therefore A(0,0), E(8,0), C(8,4), \\
& \therefore AB = 8, BC = 4, \\
& \therefore \text{四边形 } ABCD \text{ 是矩形, } BC = 4, \\
& \therefore AD = CB = 4, \angle ABC = 90^\circ, \\
& \therefore AB = 8, CB = 4, \angle ABC = 90^\circ, \\
& \therefore AC = 4\sqrt{5}, \\
& \therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times AB \times BC = \frac{1}{2} \times AC \times BG, \\
& AB = 8, CB = 4, AC = 4\sqrt{5}, \\
& \therefore GB = \frac{8\sqrt{5}}{5}, \\
& \therefore EG = GB, GB = \frac{8\sqrt{5}}{5}, \\
& \therefore EB = 2GB = \frac{16\sqrt{5}}{5}, \\
& \therefore BF = 8 - AF, EF \perp AB, AE = AB = 8, EB = \frac{16\sqrt{5}}{5}, \\
& \therefore 8^2 - AF^2 = \left(\frac{16\sqrt{5}}{5}\right)^2 - (8 - AF)^2, \\
& \text{解得: } AF = \frac{24}{5}, \\
& \therefore EF \perp AB, AF = \frac{24}{5}, AE = 8, \\
& \therefore EF = \frac{32}{5}, \\
& \therefore EF = \frac{32}{5}, AF = \frac{24}{5}, \\
& \therefore E \text{ 点坐标为 } \left(\frac{24}{5}, \frac{32}{5}\right).
\end{aligned}$$

【标注】【知识点】四边形与折叠问题

17. 如图，将矩形纸片 $ABCD$ 放入以 BC 所在直线为 x 轴， BC 边上一点 O 为坐标原点的直角坐标系中，连接 OD ，将纸片 $ABCD$ 沿 OD 折叠，使得点 C 落在 AB 边上点 C' 处，若 $AB = 5$ ， $BC = 3$ ，则点 C 的坐标为 _____。



【答案】 $\left(\frac{5}{3}, 0\right)$

【解析】 $\because$ 矩形纸片 $ABCD$ 中, $AB = 5$, $BC = 3$,

$$\therefore AD = 3, CD = C'D = 5,$$

$$\therefore \text{Rt}\triangle ADC' \text{ 中, } AC' = \sqrt{C'D^2 - AD^2} = 4,$$

$$\therefore BC' = 5 - 4 = 1,$$

$$\text{设 } BO = x, \text{ 则 } CO = C'O = 3 - x,$$

$$\therefore \text{Rt}\triangle BOC' \text{ 中, } BO^2 + BC'^2 = C'O^2,$$

$$\therefore x^2 + 1^2 = (3 - x)^2,$$

$$\text{解得 } x = \frac{4}{3},$$

$$\therefore CO = 3 - \frac{4}{3} = \frac{5}{3},$$

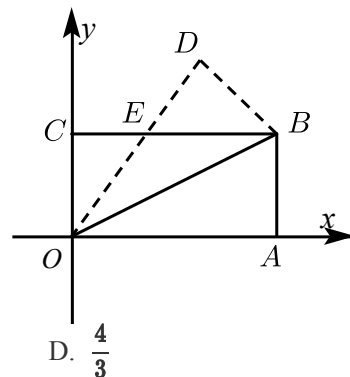
又 $\because$ 点 C 在 x 轴上,

$$\therefore \text{点 } C \text{ 的坐标为 } \left(\frac{5}{3}, 0\right).$$

$$\text{故答案为: } \left(\frac{5}{3}, 0\right).$$

【标注】【知识点】翻折问题与勾股定理

18. 如图, 在矩形 $OABC$ 中, $OA = 8$, $OC = 4$, 沿对角线 OB 折叠后, 点 A 与点 D 重合, OD 与 BC 交于点 E , 设点 D 的坐标是 (x, y) , 则 $\frac{y}{x}$ 的值为 ().



A. $\frac{3}{5}$

B. $\frac{5}{3}$

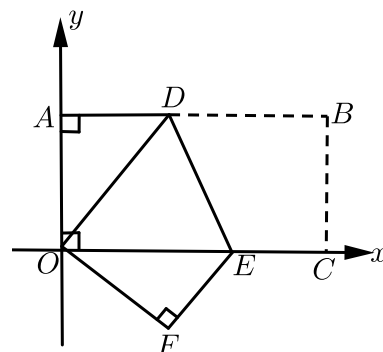
C. $\frac{3}{4}$

D. $\frac{4}{3}$

【答案】 D

【标注】【知识点】其它翻折问题

19. 如图，矩形 $OABC$ 中， $AB = 8$ ， $OA = 4$ 。以 O 点为坐标原点， OC 、 OA 所在的直线分别为 x 轴、 y 轴，建立直角坐标系，把矩形 $OABC$ 折叠，使点 B 与点 O 重合，点 C 移到点 F 位置，折痕为 DE 。



- (1) 求 OD 的长。
(2) 求 F 点坐标。

【答案】(1) 5。

(2) $F\left(\frac{16}{5}, -\frac{12}{5}\right)$ 。

【解析】(1) $\because$ 矩形 $OABC$ 折叠，点 B 与点 O 重合，点 C 点 F 重合，

$$\therefore OD = DB,$$

$$\text{设 } OD = x \text{ 则 } DB = x, AD = 8 - x,$$

$$\text{在 } \triangle AOD \text{ 中, } \angle OAD = 90^\circ,$$

$$\text{由勾股定理得: } OA^2 + AD^2 = OD^2,$$

$$\therefore 4^2 + (8 - x)^2 = x^2,$$

$$\text{解得: } x = 5,$$

$$\therefore OD = 5.$$

(2) $\because$ 四边形 $OABC$ 是矩形，

$$\therefore OA = BC = 4, AB \parallel OC,$$

$\because$ 把矩形 $OABC$ 折叠，

$$\therefore BC = OF = 4, \angle BDE = \angle ODE, \angle BCO = \angle F = 90^\circ,$$

$$\therefore AB \parallel OC,$$

$$\therefore \angle BDE = \angle DEO,$$

$$\therefore \angle ODE = \angle DEO,$$

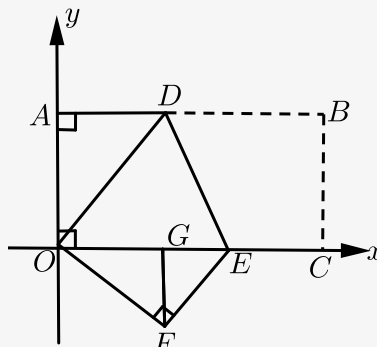
$$\therefore OD = OE,$$

$$\text{由(1)知 } OD = 5,$$

$$\therefore OE = 5,$$

在Rt△OEF中，由勾股定理得： $EF = \sqrt{OE^2 - OF^2} = 3$ ，

过F作FG⊥x轴交于点G，



$$\therefore S_{\triangle OEF} = S_{\triangle OEF},$$

$$\therefore \frac{1}{2} \times OE \times FG = \frac{1}{2} \times EF \times OF,$$

$$\text{即 } \frac{1}{2} \times 5 \times FG = \frac{1}{2} \times 3 \times 4,$$

$$FG = \frac{12}{5},$$

在Rt△OFG中，由勾股定理得：

$$OG = \sqrt{OF^2 - FG^2} = \frac{16}{5},$$

又∵F在第四象限内，

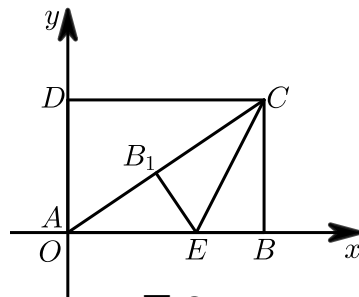
$$\therefore F\left(\frac{16}{5}, -\frac{12}{5}\right).$$

【标注】【知识点】翻折问题与勾股定理

20. 如图，长方形纸片ABCD放置在平面直角坐标系中，A与原点O重合，B、D分别在x轴和y轴上，
AB = 8，AD = 6.

(1) 直接写出点C的坐标.

(2) 如图①折叠△CEB使B落在线段AC的B₁处，折痕为CE，求点E的坐标.



图①

(3) 如图②点P在线段DC上，若△PAB为等腰三角形，试直接写出满足条件的所有点P的坐标.

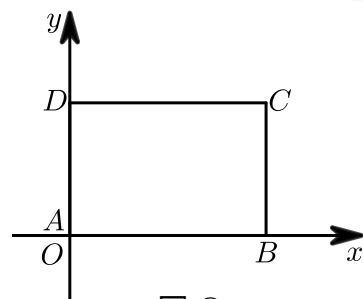


图 ②

【答案】(1) $C(8, 6)$.

(2) $E(5, 0)$.

(3) $(8 - 2\sqrt{7}, 6)$, $(4, 6)$, $(2\sqrt{7}, 6)$.

【解析】(1) $\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形 ,

$$\therefore CD = AB = 8 , BC = AD = 6 , \angle ADC = \angle CBA = 90^\circ ,$$

$$\therefore C(8, 6) .$$

(2) 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中 , $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = 10$,

$\because$ 折叠 $\triangle CEB$ 使 B 落在线段 AC 的 B_1 处 ,

$$\therefore \triangle BCE \cong \triangle B_1CE ,$$

$$\therefore CB_1 = 6 , B_1E = BE , \angle CB_1E = \angle EBC = 90^\circ ,$$

$$\therefore AB_1 = 4 , \angle AB_1E = 90^\circ ,$$

$$\therefore AE^2 = AB_1^2 + B_1E^2 ,$$

$$\text{即 } AE^2 = 4^2 + (8 - AE)^2 ,$$

$$\text{解得 : } AE = 5 ,$$

$$\therefore E(5, 0) .$$

(3) 如图② ,

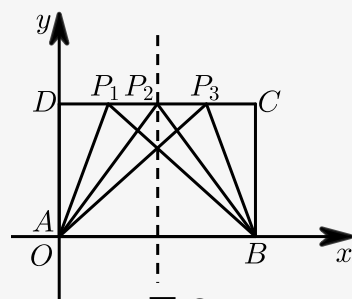


图 ②

若 $\triangle PAB$ 为等腰三角形 ,

① 当 $PA = PB$, 即点 P 在 AB 的垂直平分线上 ,

$$\therefore P(4, 6) ;$$

② 当 $AB = AP = 8$,

$$\therefore DP = \sqrt{AP^2 - AD^2} = \sqrt{8^2 - 6^2} = 2\sqrt{7},$$

$$\therefore P(2\sqrt{7}, 6);$$

$$\textcircled{3} \text{ 当 } BA = BP = 8, CP^2 + BC^2 = BP^2, \text{ 即 } CP^2 + 6^2 = 8^2,$$

$$\therefore PC = 2\sqrt{7},$$

$$\therefore DP = 8 - 2\sqrt{7},$$

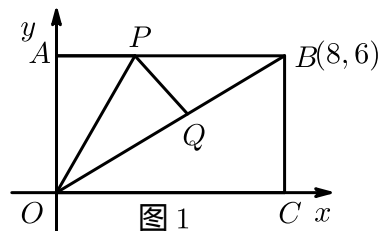
$$\therefore P(8 - 2\sqrt{7}, 6);$$

综上所述：若 $\triangle PAB$ 为等腰三角形， P 点坐标为： $(8 - 2\sqrt{7}, 6)$ ， $(4, 6)$ ， $(2\sqrt{7}, 6)$ 。

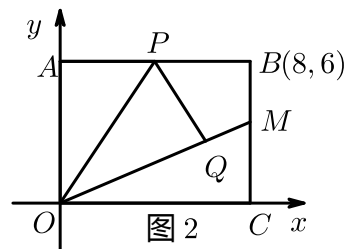
【标注】【知识点】翻折问题与勾股定理

21. 将矩形纸片 $OABC$ 放在平面直角坐标系中， O 为原点，点 A 在 y 轴上，点 C 在 x 轴上，点 B 坐标是 $(8, 6)$ ，点 P 是 AB 上的一个动点，将 $\triangle OAP$ 沿 OP 折叠，使点 A 落在点 Q 处。

(1) 如图1，当点 Q 恰好落在 OB 上时，求点 P 的坐标。



(2) 如图2，当点 P 是 AB 中点时，直线 OQ 交 BC 于点 M 。



① 求证： $MB = MQ$ 。

② 求点 Q 的坐标。

【答案】(1) 点 P 的坐标为 $(3, 6)$ 。

(2) ① 证明见解析。

② 点 Q 的坐标是 $(\frac{72}{13}, \frac{30}{13})$ 。

【解析】(1) $\because$ 四边形 $ABCO$ 为矩形，点 B 坐标是 $(8, 6)$ ，

$$\therefore AO = BC = 6, OC = AB = 8,$$

$$\text{在Rt}\triangle OCB\text{中}, OB = \sqrt{OC^2 + BC^2} = 10,$$

$\because \triangle OAP$ 沿 OP 折叠，使点 A 落在点 Q 处，

$$\begin{aligned} \therefore \text{Rt}\triangle OQN &\sim \text{Rt}\triangle OMC, \\ \therefore \frac{QN}{MC} &= \frac{ON}{OC} = \frac{OQ}{OM}, \text{ 即 } \frac{QN}{\frac{10}{3}} = \frac{ON}{8} = \frac{6}{\frac{26}{3}}, \\ \therefore QN &= \frac{30}{13}, ON = \frac{72}{13}, \\ \therefore \text{点} Q &\text{的坐标是} \left(\frac{72}{13}, \frac{30}{13}\right). \end{aligned}$$

【标注】【知识点】翻折问题与勾股定理

22. 如图所示, 将矩形纸片 $OABC$ 放置在直角坐标系中, 点 $A(3, 0)$, 点 $C(0, \sqrt{3})$.

(1) 如图1, 经过点 O 、 B 折叠纸片, 得折痕 OB , 点 A 的对应点为 A_1 , 求 $\angle A_1OC$ 的度数.

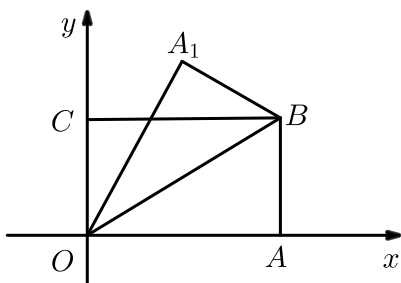


图 1

(2) 如图2, 点 M 、 N 分别为边 OA 、 BC 上的动点, 经过点 M 、 N 折叠纸片, 得折痕 MN , 点 B 的对应点为 B_1 .

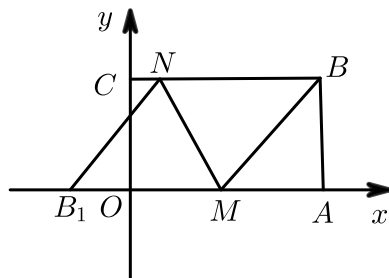


图 2

- ① 当点 B_1 的坐标为 $(-1, 0)$ 时, 请你判断四边形 $MBNB_1$ 的形状, 并求出它的周长.
- ② 若点 N 与点 C 重合, 当点 B_1 落在坐标轴上时, 直接写出点 M 的坐标.

【答案】(1) 30° .

(2) ① 菱形; $\frac{19}{2}$.

② $(3 - \sqrt{6}, 0)$.

【解析】(1) $\because A(3, 0)C(0, \sqrt{3})$,

且四边形 $OABC$ 是矩形.

$\therefore B$ 点坐标为 $(3, \sqrt{3})$.

$\therefore OA = BC = 3$.

$$AB = OC = \sqrt{3}.$$

$$\therefore OB = \sqrt{OA^2 + AB^2} = 2\sqrt{3}.$$

$$\therefore \text{在 Rt}\triangle AOB \text{ 中, } AB = \frac{1}{2}OB,$$

$$\therefore \angle AOB = 30^\circ.$$

$$\therefore \text{由折叠知 } \angle A_1OB = \angle AOB = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle A_1OC = 90^\circ - \angle A_1OB - \angle AOB = 30^\circ.$$

(2) ① 由折叠知 $BN = B_1N$.

$$\angle BNM = \angle B_1NM, \angle BMN = \angle B_1MN.$$

$$\therefore BN \parallel B_1M,$$

$$\therefore \angle BNM = \angle B_1MN.$$

$$\therefore \angle B_1NM = \angle BMN.$$

$$\therefore B_1N \parallel BM.$$

$\therefore$ 四边形 B_1MBN 是菱形.

设 M 点坐标为 $(a, 0)$ 且 B_1 坐标 $(-1, 0)$,

$$\therefore BM = B_1M = a + 1.$$

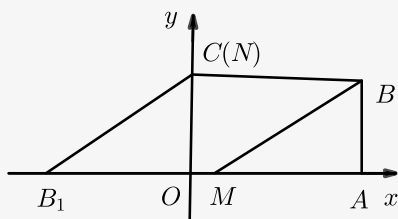
$$AM = OA - DM = 3 - a.$$

$$\therefore (3 - a)^2 + (\sqrt{3})^2 = (a + 1)^2.$$

$$\text{解为 } a = \frac{11}{8}.$$

$$\therefore (\text{四边形}) B_1MBN \text{ 的周长} = 4BM = 4(a + 1) = \frac{19}{2}.$$

②



由①知, 四边形 B_1MBN 是菱形,

$$\therefore B_1C = B_1M = BM = BC = 3.$$

$$\therefore \text{且 } OC = \sqrt{3},$$

$$\therefore OB_1 = \sqrt{B_1C^2 - OC^2} = \sqrt{6}.$$

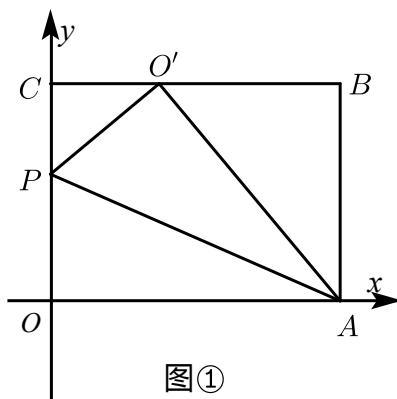
$$\therefore OM = B_1M - OB_1 = 3 - \sqrt{6}.$$

$$\therefore M \text{ 点的坐标为 } (3 - \sqrt{6}, 0).$$

【标注】【知识点】翻折问题与勾股定理

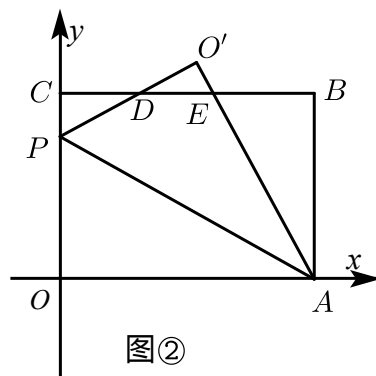
将一个矩形纸片 $OABC$ 放置在平面直角坐标系中，点 $O(0,0)$ ，点 $A(8,0)$ ，点 $C(0,6)$ ， P 是边 OC 上的一点（点 P 不与点 O ， C 重合），沿着 AP 折叠该纸片，得点 O 的对应点 O' 。

(1) 如图①，当点 O' 落在边 BC 上时，求点 O' 的坐标。



(2) 若点 O' 落在边 BC 的上方， $O'P$ ， $O'A$ 与边 BC 交于点 D ， E 。

① 如图②，当 $\angle OAP = 30^\circ$ 时，求点 D 的坐标。



② 当 $CD = O'D$ 时，求点 D 的坐标（直接写出结果即可）。

【答案】 (1) $O'(8 - 2\sqrt{7}, 6)$ 。

(2) ① $D(6\sqrt{3} - 8, 6)$ 。

② $D(\frac{9}{4}, 6)$ 。

【解析】 (1) 由折叠可知： $AO = AO' = 8$ ，

在 $\text{Rt}\triangle ABO'$ 中： $BO' = \sqrt{AO'^2 - AB^2} = \sqrt{8^2 - 6^2} = 2\sqrt{7}$ ，

$\therefore CO' = BC - BO' = 8 - 2\sqrt{7}$ ，

$\therefore O'(8 - 2\sqrt{7}, 6)$ 。

(2) ① $\because \angle OAP = 30^\circ$

$\therefore OP = OA \tan 30^\circ = \frac{8}{3}\sqrt{3}$ ， $CP = OC - OP = 6 - \frac{8}{3}\sqrt{3}$ ，

由折叠知： $\angle OPA = \angle O'PA = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$ ，

$\therefore \angle CPO = 180^\circ - 60^\circ - 60^\circ = 60^\circ$ ，

$\therefore CD = CP \tan 60^\circ = 6\sqrt{3} - 8$ ，

$$\therefore D(6\sqrt{3}-8, 6) .$$

② 设 $OP = x$,

当 $CD = O'D$ 时 , 可得 :

$$\triangle CPD \cong \triangle O'ED ,$$

$$\therefore CP = O'E = 6 - x ,$$

$$CD = DO' , PD = DE ,$$

$$\therefore DE = PO' = OP = x ,$$

$$\therefore AE = AO' - O'E = 8 - (6 - x) = x + 2 ,$$

$$BE = BC - CE = 8 - x ,$$

$$\text{在 Rt}\triangle ABE \text{ 中 : } AB^2 + BE^2 = AE^2 ,$$

$$\text{即 } (6+x)^2 = (8-x)^2 + 6^2 ,$$

$$\text{解得 : } x = \frac{24}{5} ,$$

$$\therefore CP = 6 - \frac{24}{5} = \frac{6}{5} ,$$

$$\text{设 } CD = y , \text{ 则 } DP = \frac{24}{5} - y ,$$

$$\therefore \text{在 Rt}\triangle CDP \text{ 中 : } CD^2 + CP^2 = DP^2 ,$$

$$\text{即 } y^2 + \left(\frac{6}{5}\right)^2 = \left(\frac{24}{5} - y\right)^2 ,$$

$$\text{解得 : } y = \frac{9}{4} ,$$

$$\therefore D\left(\frac{9}{4}, 6\right) .$$

【标注】【知识点】翻折问题与勾股定理